17- تمرينات محلولة :

مثال (1) : أثبت أنّ للمعادلة التكاملية :

$$g(x) = \lambda \int_0^\pi [\sin x \sin 2t + \sin 2x \sin 4t]\, g(t)dt +$$

$$+ ax^2 + bx + c \qquad (1)$$

حلاً وحيداً من أجل أي قيمة للوسطاء a, b, λ .

الحل : من المعادلة (1) لدينا :

$$a_1(x) = \sin x \quad , \; a_2(x) = \sin 2x ,$$

$$b_1(t) = \sin 2t \quad , \; b_2(t) = \sin 4t \; , \quad f(x) = ax^2 + bx + c$$

ومن ثمّ ، حل المعادلة المعطاة (1) يعطى بالعلاقة (انظر الدستور (5)) :

$$g(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{2} c_i a_i(x)$$

$$= ax^2 + bx + c + \lambda c_1 a_1(x) + \lambda c_2 a_2(x)$$

$$g(x) = ax^2 + bx + c + \lambda c_1 \sin x + \lambda c_2 \sin 2x \qquad (2)$$

علماً أنّ c_1, c_2 مجهولان يطلب تعيينهما . لحساب هذين المجهولين ، نبدأ من العلاقات التالية :

$$f_i + \lambda \sum_{j=1}^{2} c_j \alpha_{ij} = c_i \quad (i = 1,2)$$

$$\left.\begin{aligned} f_1 + \lambda(\alpha_{11}c_1 + \alpha_{12}c_2) = c_1 \\ f_2 + \lambda(\alpha_{21}c_1 + \alpha_{22}c_2) = c_2 \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

$$\int_0^\pi b_i(t) f(t)dt = f_i \quad , \quad \int_0^\pi b_i(t) a_j(t)dt = \alpha_{ij} \quad (i, j = 1,2)$$

من هذه العلاقات نحصل على :

$$f_1 = \int_0^\pi b_1(t)\, f(t)\, dt = \int_0^\pi \sin 2t (at^2 + bt + c)\, dt =$$

$$= a\int_0^{\pi} t^2 \sin 2t dt + b\int_0^{\pi} t \sin 2t dt + c\int_0^{\pi} \sin 2t dt$$

وبإجراء عملية التكامل ، وذلك بتطبيق التكامل بالتجزئة مرتين على التكامل الأول ومرة واحدة على التكامل الثاني ، نحصل على :

$$f_1 = -\frac{a\pi^2 + b\pi}{2}$$

حساب f_2 :

$$f_2 = \int_0^{\pi} b_2(t)\, f(t)\, dt = \int_0^{\pi} \sin 4t(at^2 + bt + c)\, dt =$$

$$= a\int_0^{\pi} t^2 \sin 4t dt + b\int_0^{\pi} t \sin 4t dt + c\int_0^{\pi} \sin 4t dt$$

وبإجراء عملية التكامل ، وذلك بتطبيق التكامل بالتجزئة مرتين على التكامل الأول ومرة واحدة على التكامل الثاني ، نحصل على :

$$f_2 = -\frac{a\pi^2 + b\pi}{4}$$

حساب المقادير $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}$ (انظر نهاية الملحق 2) :

$$\alpha_{11} = \int_0^{\pi} b_1(t)\, a_1(t)\, dt = \int_0^{\pi} \sin t \sin 2t\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} [\cos(2t - t) - \cos(2t + t)]\, dt = 0$$

$$\alpha_{12} = \int_0^{\pi} b_1(t)\, a_2(t)\, dt = \int_0^{\pi} \sin^2 2t\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (1 - \cos 2t) dt = \frac{\pi}{2}$$

$$\alpha_{21} = \int_0^{\pi} b_2(t)\, a_1(t)\, dt = \int_0^{\pi} \sin 4t \sin t\, dt =$$

$$\alpha_{21} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(\cos 3t - \cos 5t)\ dt = 0$$

$$\alpha_{22} = \int_0^{\pi} b_2(t)\,a_2(t)\,dt = \int_0^{\pi}\sin 4t \sin 2t\ dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(\cos 2t - \cos 6t)dt = 0$$

نـبدل قيم $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}, f_1, f_2$ بما يساويها في المعادلات (3) ، نحصل على المعادلات الجبرية الخطية التالية :

$$\left.\begin{aligned} c_1 - \frac{\lambda\pi}{2}c_2 &= \frac{a\pi^2 + b\pi}{2} \\ c_2 &= \frac{a\pi^2 + b\pi}{4} \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

ومعين الأمثال هو :

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & \frac{\pi\lambda}{2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

وبالتالــي معــيّن الأمثال لا يساوي الصفر ، ومن ثمَّ للمعادلة التكاملية المعطاة (1) حل وحيد وذلك مهما تكن قيم الوسطاء λ , c , b , a .

إيجاد هذا الحل : من المعادلات الجبرية (4) نجد قيمتي c_1, c_2 وهي :

$$c_1 = (a\pi + b)(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2\lambda}{8})$$

$$c_2 = \frac{a\pi^2 + b\pi}{4}$$

نبدل c_1, c_2 بما يساويها في العلاقة (2) نحصل على الحل المطلوب ، وهو :

$$g(x) = \lambda(a\pi + b)(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2\lambda}{8})\sin x + \lambda\frac{a\pi^2 + b\pi}{4}\sin 2x +$$

$$+ ax^2 + bx + c$$

مثال (4) : أوجد حل المعادلة التكاملية التالية :

$$g(x) = \cos 2x + \lambda \int_0^{\pi} \sin(x-2t) g(t) dt \qquad (1)$$

ثمّ أوجد حل منقول المعادلة المتجانسة الموافقة للمعادلة المعطاة وذلك في حالة $\lambda = -\frac{3}{4}$.

يجب أن تكون $\lambda = -\frac{3}{4}$ احدى القيم الخاصة

الحل : من المعادلة المعطاة (1) لدينا :

$$a_1(x) = \sin x \quad , \quad a_2(x) = -\cos x \quad , \quad a = 0, b = \pi$$

$$b_1(t) = \cos 2t \quad , \quad b_2(t) = \sin 2t \quad , \quad f(x) = \cos 2x$$

وذلك لأنّ النواة $k(x,t)$ تكتب على الشكل :

$$K(x,t) = \sin(x-2t) = \sin x . \cos 2t - \cos x . \sin 2t$$

وبالتالي الحل يعطى بالعلاقة :

$$g(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{2} c_i a_i(x)$$

$$= f(x) + \lambda[c_1 a_1(x) + c_2 a_2(x)]$$

$$= \cos 2x + \lambda[c_1 \sin x - c_2 \cos x] \qquad (2)$$

علماً أنّ c_1, c_2 مجهولان ، يتحددان من العلاقات التالية :

$$f_i + \lambda \sum_{j=1}^{2} c_j \alpha_{ij} = c_i \quad (i = 1,2)$$

$$\left.\begin{aligned} f_1 + \lambda(\alpha_{11} c_1 + \alpha_{12} c_2) = c_1 \\ f_2 + \lambda(\alpha_{21} c_1 + \alpha_{22} c_2) = c_2 \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

$$\int_a^b b_i(t) f(t) dt = f_i \quad , \quad \int_a^b b_i(t) a_j(t) dt = \alpha_{ij} \quad (i, j = 1,2)$$

من هذه العلاقات نحصل على :

$$f_1 = \int_0^{\pi} b_1(t) f(t) \; dt = \int_0^{\pi} \cos 2t . \cos 2t dt =$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos 4t)dt \ =\frac{\pi}{2}$$

$$f_2=\int_0^{\pi}b_2(t)f(t)\ dt=\int_0^{\pi}\sin 2t.\cos 2tdt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin 4tdt \ = \ 0$$

$$\alpha_{11}=\int_0^{\pi}b_1(t)\ a_1(t)\,dt=\int_0^{\pi}\cos 2t\,.\ \sin t\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}[\sin 3t-\sin t]dt=-\frac{2}{3}$$

$$\alpha_{12}=\int_0^{\pi}b_1(t)\ a_2(t)\,dt=-\int_0^{\pi}\cos 2t\,.\ \cos t\,dt$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}[\cos 3t+\cos t]dt \ =0$$

$$\alpha_{21}=\int_0^{\pi}b_2(t)\ a_1(t)\,dt=\int_0^{\pi}\sin 2t\,.\ \sin t\,dt=0$$

$$\alpha_{22}=\int_0^{\pi}b_2(t)\ a_2(t)\,dt=-\int_0^{\pi}\sin 2t\,.\ \cos t\,dt=-\frac{4}{3}$$

نبدل هذه القيم في العلاقات (3) نحصل على جملة المعادلات الجبرية التالية :

$$\left.\begin{array}{l}(1+\frac{2}{3}\lambda)c_1=\frac{\pi}{2}\\(1+\frac{4}{3}\lambda)c_2=0\end{array}\right\} \qquad (4)$$

ومنه معين الأمثال للمجموعة (4) هو :

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix}1+\frac{2}{3}\lambda & 0\\ 0 & 1+\frac{4}{3}\lambda\end{vmatrix}=(1+\frac{2}{3}\lambda)(1+\frac{4}{3}\lambda)$$

وهنا نميز حالتين :

الحالة الأولى $D(\lambda) \neq 0$ أي أنَّ $\lambda \neq -\frac{3}{4}$ و $\lambda \neq -\frac{3}{2}$:

في هذه الحالة يوجد للمعادلة التكاملية المعطاة (1) حل وحيد . لإيجاد هذا الحل نجد أولاً قيمة الثابتين c_1, c_2 من المعادلات (4) ، وبعد ذلك نبدل القيم التي تمَّ إيجادها في العلاقة (2) نحصل على الحل المطلوب من الشكل :

$$g(x) = \cos 2x + \frac{3\pi\lambda}{2(3+2\lambda)}\sin x$$

الحالة الثانية $D(\lambda) = 0$ أي أنَّ $\lambda = -\frac{3}{4}$ أو $\lambda = -\frac{3}{2}$:

ا) عندما $\lambda = -\frac{3}{4}$: نبدل قيمة $\lambda = -\frac{3}{4}$ في المعادلات الجبرية (4) نجد :

$$c_1 = \pi \quad , \quad 0.c_2 = 0 \ , \ \forall c_2$$

ومــن ثــمَّ للمعادلـــة المعطاة (1) عدد لا نهائي من الحلول ، وذلك بشرط $c_1 = \pi$ ومهما تكن قيمة الثابت الاختياري c_2 ، وهذه الحلول هي (نبدل في العلاقة (2)) :

$$g(x) = \cos 2x - \frac{3\pi}{4}\sin x + \frac{3}{4}c_2\cos x \quad , \ \forall c_2$$

ب) أما في حالة $\lambda = -\frac{3}{2}$: المعادلات الجبرية (4) ، تأخذ الشكل التالي :

$$0.c_1 = \pi \quad , \quad -c_2 = 0$$

من المعادلة الثانية نجد أنَّ $\pi = 0$ وهذا مستحيل ، ومن ثمَّ المعادلة التكاملية المعطاة (1) لا تملك أي حل عندما $\lambda = -\frac{3}{2}$.

حل منقول المعادلة المتجانسة الموافقة للمعادلة المعطاة ($\lambda = -\frac{3}{4}$) ، أي المعادلة :

$$g(x) = -\frac{3}{4}\int_0^{\pi}\sin(t-2x)g(t)dt$$

يعطى بالعلاقة :

$$g(x) = -\tfrac{3}{4}[c_1 \cos 2x - c_2 \sin 2x]$$

علماً أنَّ c_1, c_2 مجهولان يتحددان من العلاقات التالية :

$$-\frac{3}{4}\sum_{k=1}^{2} c_k \alpha_{ki} = c_i \quad (i = 1,2)$$

بفك هذه السلسلة نحصل على جملة المعادلتين :

ومن العلاقتين (5) و (6) نحصل على :

$$A = 0 \quad , \quad B\sin\sqrt{\lambda} = \frac{\lambda}{2}\int_0^1 tg(t)dt \qquad (7)$$

باشتقاق العلاقة (5) بالنسبة لـ x ، وبفرض $x = 1, A = 0$ نجد أنَّ :

$$g'(x) = B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x$$

$$g'(1) = B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}$$

وبالاستفادة من العلاقة (6) نجد :

$$B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda} = -\frac{\lambda}{2}\int_0^1 tg(t)dt \qquad (8)$$

وبقسمة طرفي العلاقتين (7) ، (8) على بعضهما نجد :

$$tg\sqrt{\lambda} = -\sqrt{\lambda} \qquad (9)$$

وبالتالي القيم الخاصة $\lambda_n (n = 1,2,....)$ هي جذور المعادلة (9) .

أمـــا التوابع الخاصة الموافقة (نبدل في العلاقة (5) و نأخذ مثلاً $B = 1$) هي من الشكل :

$$g_n(x) = \sin\sqrt{\lambda_n}\, x$$

مثال (10): أوجد حل المعادلة التكاملية التالية :

$$g(x) = ax + b + \lambda\int_{-\pi}^{\pi}(x\sin y + \cos x)g(y)\,dy \qquad (1)$$

مستخدماً النواة الحالة $R(x, y, \lambda)$.

الحل : حل المعادلة المعطاة يعطى بالعلاقة :

$$g(x) = ax + b + \lambda\int_{-\pi}^{\pi}R(x, y, \lambda)(ay + b)\,dy \qquad (2)$$

حيث يتعيّن التابع الحال $R(x, y, \lambda)$ من العلاقة التالية :

$$R(x,y,\lambda) = K_1(x,t) + \lambda K_2(x,t) + \lambda^2 K_3(x,t) + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + \lambda^{n-1} K_n(x,t) + \lambda^n K_{n+1}(x,t) + \ldots\ldots \qquad (3)$$

من المعادلة المعطاة (1) لدينا :

$$K(x,y) = x \sin y + \cos x$$

ومن ثمَّ نحصل على :

$$K_1(x,y) = K(x,y) = x \sin y + \cos x$$

$$K_2(x,y) = \int_{-\pi}^{\pi} K_1(x,y_1) K(y_1,y) dy_1$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} (x \sin y_1 + \cos x)(y_1 \sin y + \cos y_1) dy_1$$
$$= 2\pi (x \sin y)$$

$$K_3(x,y) = \int_{-\pi}^{\pi} K_2(x,y_1) K(y_1,y) dy_1$$
$$= 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} x \sin y_1 (y_1 \sin y + \cos y_1) dy_1$$
$$= 2\pi x \sin y \int_{-\pi}^{\pi} y_1 \sin y_1 dy_1 + 2\pi x \int_{-\pi}^{\pi} \cos y_1 \sin y_1 dy_1$$
$$= (2\pi)^2 (x \sin y)$$

وهكذا نتابع ، نحصل على :

$$K_n(x,y) = \int_{-\pi}^{\pi} K_{n-1}(x,y_1) K(y_1,y) dy_1$$
$$= (2\pi)^{n-1} (x \sin y) \ , \qquad (n > 1)$$

نبدل هذه القيم في العلاقة (3) ، نحصل على النواة الحالة :

$$R(x,y,\lambda) = x \sin y + \cos x + (\lambda 2\pi) x \sin y +$$
$$+ (2\lambda\pi)^2 x \sin y + \ldots\ldots (2\lambda\pi)^n x \sin y + \ldots\ldots$$

العلاقة الأخيرة ، تكتب على الشكل التالي :

$$R(x,y,\lambda) = \cos x + x\sin y[1 + \lambda 2\pi + +(2\lambda\pi)^2 + +(2\lambda\pi)^3 + \ \ ...... + (2\lambda\pi)^n + ...$$

وبفرض أنَّ $|2\lambda\pi| < 1$ نجد أنَّ :

$$R(x,y,\lambda) = \cos x + \frac{x\sin y}{1-2\lambda\pi} \quad , (\lambda \neq \frac{1}{2\pi})$$

نبدل هذه القيمة في العلاقة (2) نحصل على حل المعادلة التكاملية (1) من الشكل :

$$g(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \left(\cos x + \frac{x\sin y}{1-2\lambda\pi}\right)(ay+b)dy + ax + b$$

$$= a\lambda\cos x \int_{-\pi}^{\pi} y dy + b\lambda \cos x \int_{-\pi}^{\pi} dy + \frac{ax}{1-2\lambda\pi}\int_{-\pi}^{\pi} y\sin y dy +$$

$$+ \frac{bx}{1-2\lambda\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin y dy + ax + b$$

$$= \frac{ax}{1-2\lambda\pi} + 2\lambda\pi b\cos x + b$$

مثال (11) : لتكن لدينا المعادلة التكاملية التالية :

$$g(x) = \cos x + \lambda \int_{0}^{2\pi} [\sin(x+t) + \tfrac{1}{2}]g(t)dt \qquad (1)$$

K(x,t) = sin x . cos t + cos x sin t + 1/2

والمطلوب :

1) ما هو الشرط الذي يجب أن تحققه λ كي يكون للمعادلة التكاملية المعطاة حلاً وحيداً ، ثمَّ أوجد هذا الحل .

2) أثبت أنه لا توجد حلول موافقة لكل قيمة خاصّة للمعادلة التكاملية المعطاة (1).

3) أوجد التوابع الخاصّة الموافقة لكل قيمة خاصّة ، للمعادلة التكاملية المتجانسة .

الحل : لدينا من المعادلة المعطاة (1) ، النواة $K(x,t)$ تكتب على الشكل التالي :

$$K(x,t) = \sin(x+t) = \sin x\cos t + \cos x \sin t + \tfrac{1}{2}$$